

考生姓名:

考生编号:

(由考生本人填写)

沈阳工业大学 2025 年硕士研究生招生考试题签

(重要提示: 答题时须写清题号, 并按照题号顺序在答题纸上作答;
所有答案必须写在答题纸上, 写在题签或草稿纸上一律无效!)

科目名称: 高等代数

科目代码: 817

第 1 页共 2 页

一、(60 分, 每小题 6 分) 判断对错并简述理由。

- 1、若多项式 $x^d - 1$ 能整除 $x^n - 1$, 则 d 一定整除 n .
- 2、若整系数多项式 $f(x)$ 在有理数域可约, 则 $f(x)$ 一定有有理根.
- 3、行列式中所有元素都变号, 则行列式一定变号.
- 4、设 A 是三阶可逆矩阵, 将 A 的第一行与第三行互换后所得的矩阵记为 B , 那么 AB^{-1} 是一个初等矩阵.
- 5、设齐次线性方程组 $AX = 0$ 与 $BX = 0$, 其中 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵, 若 $AX = 0$ 的解均是 $BX = 0$ 的解, 则矩阵的秩 $R(A) \leq R(B)$.
- 6、设 V_1 与 V_2 分别是齐次方程组 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 与 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 的解空间, 则必有 $P^n = V_1 \oplus V_2$.
- 7、设 σ 是线性空间 V 上的线性变换, 且 σ 的行列式为零, 则 σ 有一个特征值为零.
- 8、设分块矩阵 $M = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$, 则矩阵 M 的秩 $R(M) = R(A) + R(B)$.
- 9、设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是欧氏空间 V 的一组基, 且 $\gamma \in V$ 使 $(\gamma, \alpha_i) = 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 那么 $\gamma = 0$.
- 10、二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$ 是正定二次型.

二、(8 分) 设 $f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 已知 A 是 n 阶方阵, 如果 $a_0 \neq 0$, 且 $f(A) = O$, 证明 A 可逆, 并求 A^{-1} .

三、(8 分) 设 A, B 均为 n 阶可逆矩阵, 证明: 若 $A + B$ 可逆, 则 $A^{-1} + B^{-1}$ 也可逆.

四、(10 分) 设矩阵 $A = (a_{ij})_{s \times n}, B = (b_{ij})_{n \times m}$, 证明: $R(AB) \geq R(A) + R(B) - n$.

沈阳工业大学 2025 年硕士研究生招生考试题签

(重要提示: 答题时须写清题号, 并按照题号顺序在答题纸上作答;
所有答案必须写在答题纸上, 写在题签或草稿纸上一律无效!)

科目名称: 高等代数

科目代码: 817

第 2 页共 2 页

五、(10 分) 已知 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶方阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为 4 维列向量, 其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$, 如果 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求线性方程组 $AX = \beta$ 的通解.

六、(10 分) 设 V_1, V_2 是数域 P 上的线性空间 V 的两个非平凡子空间, 证明: 在 V 中存在向量 α , 使 $\alpha \notin V_1$ 且 $\alpha \notin V_2$.

七、(10 分) 设 ρ, τ 是 n 维线性空间 V 上的两个线性变换, 如果 ρ 对应矩阵的秩与 τ 对应矩阵的秩之和小于 n , 证明: ρ, τ 有公共的特征向量.

八、(10 分) 设 A 为 n ($n \geq 2$) 阶复矩阵, 且 A 不可逆, 求 A^* 的若尔当标准形.

九、(12 分) 用 $R[x]_4$ 表示实数域 R 上次数小于 4 的一元多项式组成的集合, 则 $R[x]_4$ 关于内积 $(f(x), g(x)) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$, $f(x), g(x) \in R[x]_4$ 构成一个欧氏空间. 设 W 是由零次多项式加上零多项式组成的子空间, 求 W^\perp 的维数和一组基.

十、(12 分) 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.
(1) 求 a 的值; (2) 求正交变换 $X = PY$, 把 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形.